Simularea examenului de bacalaureat național 2016
Proba E. c) - 16.12.2015
M_st-nat.

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I (30 puncte)

5p 1. Calculați $\sqrt[3]{\frac{27}{8}}+(0,25)^{-2}-\log_5\sqrt{5}$.

5p 2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x-1$. Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x\cdot(f\circ f)(x)=9-4x$.

5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $25^x-6\cdot5^x+5=0$.

5p 4. Determinați numărul elementelor unei mulțimi care are 36 de submulțimi cu exact 2 elemente.

5p 5. Se consideră triunghiul ABC și punctul $M\in(BC)$ astfel încât $\overrightarrow{MB}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.

Determinați $a,\ b\in\mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{AM}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$.

5p 6. Calculați $\cos(\hat{A})$ în triunghiul ABC, știind că $AB=AC=4$ și $BC=3\sqrt{2}$.

Subiectul II (30 puncte)

1. Fie $m\in\mathbb{R}$, sistemul de ecuații $\begin{cases} mx+y+z=1 \\ x+my+z=1 \\ x+y+mz=m \end{cases}$ și A matricea sistemului.

5p a) Demonstrați că $\det(A)=(m-1)^2(m+2)$.

5p b) Determinați valorile reale ale lui m pentru care sistemul este de tip Cramer.

5p c) Rezolvați sistemul pentru $m=2$.

2. Fie mulţimea $M=\left\{A(a)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -a & 1 & -\frac{a^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a\in\mathbb{R}\right\}$.

5p a) Demonstrați că M este parte stabilă a lui $M_3(\mathbb{R})$ în raport cu înmulţirea matricelor.

5p b) Arătați că $(M,\cdot)$ este grup abelian.

5p c) Calculați $(A(a))^{2015}$.

Subiectul III (30 puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^2-3x}{x+1}$.

5p a) Calculați $\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

5p b) Determinați punctele de extrem ale funcției.

5p c) Scrieți ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției.

2. Se consideră funcțiile $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x(x^2-3x+1),\ F(x)=e^x(x^2-5x+6)$.

5p a) Arătați că funcția F este o primitivă a funcției f.

5p b) Calculați $\int_{-1}^{0}f(x)dx$.

5p c) Determinați punctele de inflexiune ale graficului funcției F.

Simularea examenului de bacalaureat național 2016
Proba E. c) - 16.12.2015
M_st-nat.

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

• **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**

BAREM DE EVALUARE

Subiectul I **(30 puncte)**

1.	$\sqrt[3]{\frac{27}{8}}+(0,25)^{-2}-\log_5\sqrt{5}=\frac{3}{2}+\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}-\frac{1}{2}=$	3p
	$=\frac{3}{2}+16-\frac{1}{2}=17$.	2p
2.	$(f\circ f)(x)=f(f(x))=3f(x)-1=3(3x-1)-1=9x-4$	2p
	$x\cdot(9x-4)=9-4x\Leftrightarrow 9x^2-9=0$	2p
	Din $x^2-1=0$ avem $x\in\{-1,1\}$.	1p
3.	$25^x-6\cdot5^x+5=0\Leftrightarrow 5^{2x}-6\cdot5^x+5=0$	1p
	$5^x=t>0\Rightarrow t^2-6t+5=0$	2p
	$t_1=1\Rightarrow 5^x=1$, de unde $x=0$	1p
	$t_2=5\Rightarrow 5^x=5$, de unde $x=1$.	1p
4.	Numărul submulțimilor cu 2 elemente ale unei mulțimi cu n elemente este C_n^2	1p
	$C_n^2=36\Leftrightarrow\frac{n!}{2!\cdot(n-2)!}=36\Leftrightarrow n^2-n-72=0,\ n\in\mathbb{N}, n\geq 2$	3p
	$n=9$.	1p
5.	$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$	3p
	$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.	1p
	$a=\frac{1}{4},\ b=\frac{3}{4}$.	1p
6.	Avem $BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos A$, de unde $\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\cdot AB\cdot AC}$	3p
	$\cos A=\frac{4^2+4^2-(3\sqrt{2})^2}{2\cdot4\cdot4}=\frac{7}{16}$.	2p

Subiectul II **(30 puncte)**

1. a)	$A=\begin{pmatrix} m & 1 & 1\\ 1 & m & 1\\ 1 & 1 & m\end{pmatrix}$, $\det(A)=\begin{vmatrix} m & 1 & 1\\ 1 & m & 1\\ 1 & 1 & m\end{vmatrix}=m^3-3m+2$	3p
	$m^3-3m+2=(m-1)^2(m+2)$. **Sau** folosind proprietățile determinanților, se calcuează direct $\det(A)=(m-1)^2(m+2)$.	2p 5p
b)	Sistem compatibil deterrminat (tip Cramer) dacă $rang(A)=rang(\overline{A})=3\Leftrightarrow\det(A)\neq0$	2p
	$\det(A)=(m-1)^2(m+2)$. Pentru $\det(A)\neq0\Leftrightarrow m\in\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$ sistemul este de tip Cramer.	3p
c)	Pentru $m=2$ se obține $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ cu $d=\det(A)=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=4\neq0$, deci $rang(A)=3$	2p
	Sistemul este de tip Cramer și are soluția $\left(x=\frac{d_x}{d},\ y=\frac{d_y}{d},\ z=\frac{d_z}{d}\right)$, unde	

	$d_x=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&1\\2&1&2\end{vmatrix}=0$, $d_y=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&1&1\\1&2&2\end{vmatrix}=0$, $d_z=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{vmatrix}=4$, deci soluția este $(x,y,z)=(0,0,1)$.	3p
2. a)	$\forall A(a),\ A(b)\in M\Rightarrow A(a)\cdot A(b)\in M$	2p
	$A(a)\cdot A(b)=\begin{pmatrix}1&0&a+b\\-(a+b)&1&-\frac{(a+b)^2}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}=A(a+b)\in M$.	3p
b)	Asociativitate: $\forall A(a),\ A(b),\ A(c)\in M\Rightarrow(A(a)\cdot A(b))\cdot A(c)=A(a)\cdot(A(b)\cdot A(c))$ Comutativitate: $\forall A(a),\ A(b)\in M\Rightarrow A(a)\cdot A(b)=A(b)\cdot A(a)$ $A(a)\cdot A(b)=A(a+b)=A(b+a)=A(b)\cdot A(a)$.	2p
	Element neutru: $\exists E=A(e)\in M$ $a.î.\forall A(a)\in M: A(a)\cdot A(e)=A(e)\cdot A(a)=A(a)$. $A(a)\cdot A(e)=A(a+e)$. Din $A(a+e)=A(a)\Rightarrow e=0\in\mathbb{R}$. Se obţine $A(e)=A(0)=I_3\in M$.	1p
	Elemente simetrizabile: $\forall A(a)\in M,\exists A(a')\in M$ $a.î$ $A(a)\cdot A(a')=A(a')\cdot A(a)=A(0)$, Din $A(a+a')=A(0)\Rightarrow a'=-a\in\mathbb{R}$. Se obţine $A(a')=A(-a)\in M$.	2p
c)	Din $A(a)\cdot A(b)=A(a+b)$ avem $A(a)^2=A(a)\cdot A(a)=A(2a)$ şi $A(a)^3=A(a)^2\cdot A(a)=A(3a)$.	2p
	Inducţie matematică pentru $A(a)^n=A(na),\ n\in\mathbb{N},n\ge 2$.	2p
	$A(a)^{2015}=A(2015a)=\begin{pmatrix}1&0&2015a\\-2015a&1&-\frac{2015^2a^2}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}$.	1p

Subiectul III **(30 puncte)**

1. a)	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$	1p
	$f'(x)=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$	2p
	$f'(2)=\frac{5}{9}$.	2p
b)	$f'(x)=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2},\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ $f'(x)=0\Leftrightarrow x^2+2x-3=0$ cu soluțiile $x_1=-3,\ x_2=1$.	2p
	Din tabelul cu semnul derivatei, avem că $x_1=-3$, geometric $A(-3,-9)$, este punct maxim şi $x_2=1$, geometric $A(1,-1)$, este punct minim.	3p
c)	Verificare asimptotă orizontală: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x}{x+1}=+\infty$. Deci nu există asimptotă orizontală la $+\infty$.	1p
	Căutăm asimptotă oblică $y=mx+n$ $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x}{x^2+x}=1\in\mathbb{R}^*$	2p
	$n=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-mx]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x}{x+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-4x}{x+1}=-4\in\mathbb{R}$ Ecuația asimptotei oblice la $+\infty$ este $y=x-4$.	2p
2. a)	F primitivă a lui f dacă F derivabilă și $F'(x)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$	1p

	$F'(x)=(e^x(x^2-5x+6))'=e^x(x^2-3x+1)$. sau calcul direct $\int e^x(x^2-3x+1)dx=e^x(x^2-5x+6)+C=F(x)$.	4p 5p
b)	Avem $\int_{-1}^{0} f(x)dx=F(x)\Big\|_{-1}^{0}=F(0)-F(-1)=$	3p
	$=\frac{6e-12}{e}$.	2p
c)	$F'(x)=e^x(x^2-3x+1)=f(x),\ x\in\mathbb{R}$ $F''(x)=f'(x)=e^x(x^2-x-2),\ x\in\mathbb{R}$	2p
	$F''(x)=0\Leftrightarrow e^x(x^2-x-2)=0\Rightarrow x_1=-1,\ x_2=2$.	2p
	Din tabelul de semn al lui $F''(x)$ se obține că punctele de inflexiune ale funcției F sunt $x_1=-1,\ x_2=2$, adică $A\left(-1,12e\right),\ B(2,0)$.	1p